رابع
③

جامعة البعث — معادلات تفاضلية /2/ — اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الفصل الأول للعام الدراسي 2016-2017

السؤال الأول : (35درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$$

السؤال الثاني: (35درجة)

لتكن لدينا المعادلة $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = e^{2x} + \sin x$

والمطلوب : 1" – أوجد الحل العام للمتجانسة المناظرة إذا علمت أن $y = e^{2x}$ حلا"خاصا"لها

2" _ اقترح حلا" خاصا" بطريقة المعاملات غير المعينة (دون تعيين المعاملات)

3" _أوجد حلا" خاصا" بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي،ماهو الحل العام لها .

السؤال الثالث: (30درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + (\tan x)y' = \cos x . \cot x$$

==============================

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

إجابة السؤال الأول : (35 درجة)

10 المعادلة تكتب بالشكل $(x+1)^2 y''+3(x+1)y'+y=\dfrac{6\ln(x+1)}{x+1}$

نفرض $x+1=e^t \Leftarrow (x+1)y'=D_t y \Leftarrow (x+1)^2 y''=D_t(D_t-1)y$

3 نعوض في المعادلة فنجد $(\ast)$ $\left(D_t^2+2D_t+1\right)y=6te^{-t}$

3 المعادلة المتجانسة المناظرة هي $\left(D_t^2+2D_t+1\right)y=0$

2+2 المعادلة المميزة هي $m^2+2m+1=0$ جذرا هذه المعادلة هما $m_1=m_2=-1$

3 وبالتالي فإن الحل العام هو $y_h=e^{-t}(a_1+a_2 t)$ والحل الخاص يعطى بالصيغة

10
$$y_p=\frac{1}{D_t^2+2D_t+1}(6te^{-t})=6.\frac{1}{D_t^2+2D_t+1}e^{-t}t=6e^{-t}\frac{1}{(D_t-1)^2+2(D_t-1)+1}t$$
$$=6e^{-t}\frac{1}{D_t^2}t=e^{-t}t^3$$

2 ومنه فإنّ الحل العام للمعادلة (*) يكون $y=y_h+y_p=e^{-t}(a_1+a_2 t)+t^3e^{-t}$

والحل العام للمعادلة المعطاة يكون $y=\dfrac{1}{x+1}\left(a_1+a_2\ln|x+1|+\ln^3|x+1|\right)$

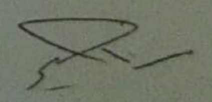
حيث a_1,a_2 ثوابت كيفية .

إجابة السؤال الثاني : $35=3+12+10+10$ درجة

"1- المعادلة المتجانسة المناظرة هي $y^{(5)}-2y^{(4)}+2y'''-4y''+y'-2y=0$

2 المعادلة المميزة هي $m^5-2m^4+2m^3-4m^2+m-2=0$

2 الحل $y=e^{2x}$ ينتج عن الجذر للمعادلة المميزة وهو $m_1=2$ وبالتالي المعادلة المميزة



2 تكتب بالشكل $(m-2).(m^4+2m^2+1)=0$ وجذور هذه المعادلة هي

2 $m_1=2 \;,\; m_3=m_2=-i \;,\; m_5=m_4=i$ ومنه فإنّ الحل العام للمعادلة المتجانسة

2 المناظرة هو $y_h=a_1e^{2x}+(a_2+a_3x)\cos x+(a_4+a_5x)\sin x$

2"- الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية هو

3 $$y_p=b_1e^{2x}+b_2\cos x+b_3\sin x$$

4 نلاحظ أنّ هنا ك اشتراك بين الحل الخاص المقترح والحل العام للمتجانسة المناظرة بأن نضرب e^{2x} ب x ونضرب الجزء الآخر ب x^2 لإزالة الأشتراك فيصبح الحل الخاص

3 المقترح وفق طريقة المعاملات غير المعينة هو $y_p=b_1xe^{2x}+b_2x^2\cos x+b_3x^2\sin x$

حيث $b_1 \;,\; b_2 \;,\; b_3$ هي المعاملات التي يراد تعينها .

3"- الحل الخاص وفق طريقة المؤثر التفاضلي العكسي يعطى بالعلاقة

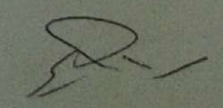
2 $$y_p=\frac{1}{D^5-2D^4+2D^3-4D^2+D-2}(e^{2x}+\sin x)$$

ولكن

4 $$y_{p_1}=\frac{1}{D^5-2D^4+2D^3-4D^2+D-2}e^{2x}=\frac{xe^{2x}}{5D^4-8D^3+6D^2-8D+1_{D=2}}=\frac{xe^{2x}}{25}$$

و

4
$$\begin{cases} y_{p_2}=\dfrac{1}{D^5-2D^4+2D^3-4D^2+D-2}\sin x \\ =\operatorname{Im}\dfrac{e^{ix}}{D^5-2D^4+2D^3-4D^2+D-2}=\operatorname{Im}\dfrac{x^2e^{ix}}{20D^3-24D^2+12D-8_{D=i}} \\ =\operatorname{Im}\dfrac{x^2e^{ix}}{-20i+24+12i-8}=\operatorname{Im}\dfrac{x^2e^{ix}}{16-8i}=\dfrac{1}{8}\operatorname{Im}\dfrac{x^2e^{ix}}{2-i} \\ =\dfrac{1}{40}(x^2\cos x+2x^2\sin x) \end{cases}$$



2 ومنه فإنّ الحل الخاص يكون $y_p = xe^{2x} + \frac{1}{40}(x^2\cos x + 2x^2\sin x)$

3 لة المعطاة هو $y = y_h + y_p = a_1e^{2x} + (a_2 + a_3x)\cos x + (a_4 + a_5x)\sin x + xe^{2x}$

$$+\frac{1}{40}(x^2\cos x + 2x^2\sin x)$$

جواب السؤال الثالث : 30 درجة

5 تكون الدالة $y = \sin mx$ حلاً" للمعادلة $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$

إذا وفقط إذا كان $mp(x)\cos mx + (g(x) - m^2)\sin mx = 0$

ومنه فإنّ الدالة $y = \sin mx$ تكون حلاً" للمعادلة $y'' + (\tan x)y' = 0$

إذا وفقط إذا كان

$$m\frac{\sin x}{\cos x}\cos mx - m^2\sin mx = 0 \Rightarrow \sin x.\cos mx - m\sin mx.\cos x = 0$$

والمعادلة الأخيرة تتحقق عندما $m = 1$ أي أنّ الدالة $y = \sin x$ هي حل خاص للمعادلة

* وبالتالي فإنّ الحل العام لها يعطى بالعلاقة

10
$$y_h = \sin x\left[\int \frac{c_1e^{-\int p(x)dx}}{\sin^2 x}dx + c_2\right] = \sin x\left[\int \frac{c_1e^{-\int \tan x dx}}{\sin^2 x}dx + c_2\right]$$

$$= \sin x\left[\int \frac{c_1\cos x}{\sin^2 x}dx + c_2\right] = \sin x\left[-c_1\frac{1}{\sin x} + c_2\right] = c_0 + c_2\sin x$$

2 حيث c_0 , c_2 ثوابت كيفية . نستنتج أن قاعدة الحلول هي $y_1 = 1$, $y_2 = \sin x$

(2+2+2) 6 ومنه فإنّ $w = \cos x$, $w_1 = -\cos^2 x$, $w_2 = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

ومنه فإنّ الحل الخاص هو

5 $$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx = -\int \cos x \, dx + \sin x \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$y_p = -\sin x + \sin x . \ln|\sin x|$$

والحل العام للمعادلة المعطاة هو

2 $$y = y_h + y_p$$

أي

$$y = c_0 + c_2 \sin x + (\ln|\sin x| - 1)\sin x$$

****

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

ملاحظة: هناك طريقة ثانية لحل التمرين السابع

نضع $y' = v \Leftarrow y'' = v'$ أي المعادلة

$$v' + (\tan x) v = \cos x \cot x$$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى عامل التكامل ظاهر

$$\mu = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} v' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} v = \cot x$$

$$\frac{1}{\cos x} v = \int \cot x \, dx + c_1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} v = \ln \sin x + c_1$$

أي أن

$$v = \cos x \ln \sin x + c_1 \cos x$$

ومنه نجد

$$y = \int \cos x \ln \sin x \, dx + c_1 \int \cos x \, dx + c_2$$

$$y = \sin x (\ln|\sin x| - 1) + c_1 \sin x + c_2$$

وهو الحل العام